

Théorème de Nagel.

Soient ABC un triangle non rectangle, \mathcal{C} son cercle circonscrit et I, J, K les pieds des hauteurs issues de A, B, C . On note H l'orthocentre du triangle ABC et O le centre de \mathcal{C} .

1) En utilisant la tangente Δ_A menée de A au cercle \mathcal{C} , montrer que les angles orientés de droites (AB, AI) et (AO, AC) sont égaux. En déduire que les couples de droites $((AB), (AC))$ et $((AI), (AO))$ ont les mêmes bissectrices.

De façon générale, on dit que les droites D'_1, D'_2 sont isogonales relativement (ou par rapport) aux droites sécantes D_1, D_2 si l'égalité $(D_1, D'_1) = (D'_2, D_2) \pmod{\pi}$ entre angles de droites est vérifiée. Le lecteur vérifiera que cela revient à dire que les couples de droites (D_1, D_2) et (D'_1, D'_2) ont mêmes bissectrices. Le Théorème de Nagel, qui est l'objet de cette première question, peut être énoncé en disant que les droites $(AB), (AC)$ sont isogonales relativement aux droites sécantes $(AI), (AO)$.

2) Vérifier que les points B, K, J, C sont cocycliques. Puis, en utilisant la première question, montrer l'égalité entre angles de droites $(JK, JB) = (\Delta_A, JB) \pmod{\pi}$. En déduire que les droites (OA) et (JK) sont perpendiculaires.

Solution :

utri0028 (A brocher avec l'énoncé
de utri0028)

Exercice : Théorème de NAGEL

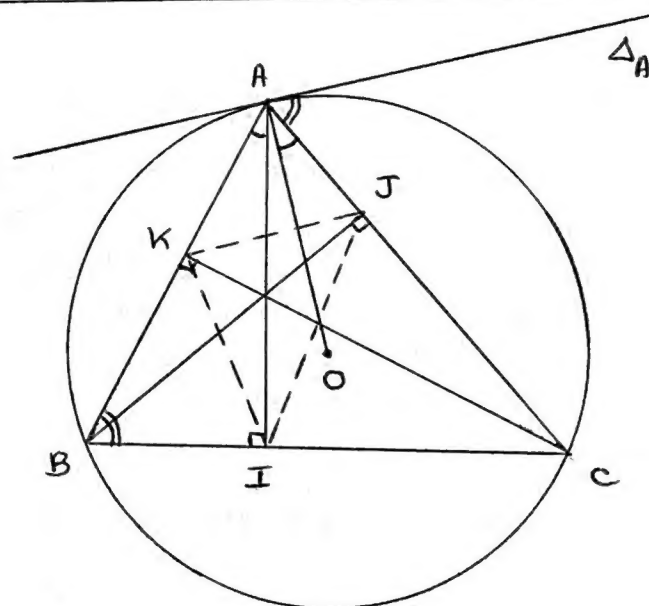
Soient ABC un triangle non rectangle, C son cercle circonscrit et I, J, K les pieds des hauteurs issues de A, B, C de ce triangle. On note H l'orthocentre du triangle ABC et O le centre de C .

1) En utilisant la tangente Δ_A en A à C , montrer que les angles orientés de droites (AB, AI) et (AO, AC) sont égaux. En déduire que les couples de droites $((AB), (AC))$ et $((AI), (AO))$ ont les mêmes bissectrices (c'est le théorème de Nagel).

2) Vérifier que les points B, K, J, C sont cocycliques. A partir de cette cocyclicité et de la première question, montrer l'égalité entre angles de droites : $(JK, JB) = (\Delta_A, JB)$. En déduire que les droites (OA) et (JK) sont perpendiculaires.

1)

$$\begin{aligned} (AO, AC) &= \frac{\pi}{2} + (\Delta_A, AC) \\ &= \frac{\pi}{2} + (BA, BC) \quad (\text{cocyclicité}) \\ &= \frac{\pi}{2} + (BA, AI) + \underbrace{(AI, BC)}_{= \frac{\pi}{2}} \\ &= (BA, AI) \quad [\pi] \end{aligned}$$



Conseil : pour le 1), raisonner d'abord en mettant les angles géométriques en évidence sur la figure.

* Soit Δ l'une des bissectrices de (AB, AC) . On aura :

$$(AI, \Delta) = (AI, AB) + (AB, \Delta) = (AC, AO) + (\Delta, AC) = (\Delta, AO)$$

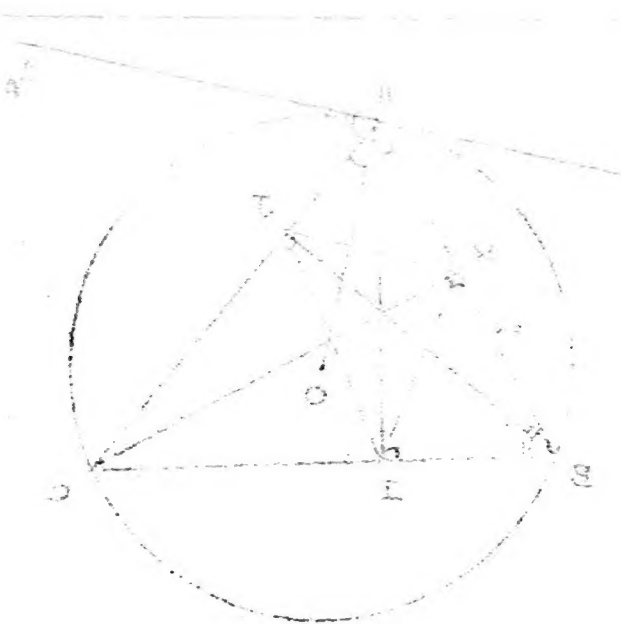
donc Δ sera l'une des bissectrices de (AI, AO) .

AB
BISSE

$$\begin{cases} (JK, JB) = (CK, CB) & [\pi] \text{ par cyclicité} \\ (\Delta_A, JB) = (AO, AC) = (AB, AI) = (CK, CB) & [\pi] \end{cases}$$

d'où l'égalité

et comme $(OA) \perp \Delta_A$, cela entraîne $(JK) \perp \Delta_A$

[illegible]

IBA Special Limited

[x] $(40, 10) = \frac{1}{2} = (20, 0)$

Ex 3 $(A_0, 2A) = (A_2, 2A)$

Course (AO) 1.4A

$$(17) \quad \pi = (1, \Delta, 2A) + (2A, 0, A)$$

1. since the family also lost

$$(14, 20) - \frac{1}{2} = (14, 30)$$

$$(CH_3COA) + H^+ \rightleftharpoons$$

$$\{ \pi \} \quad (2A, 0A) =$$

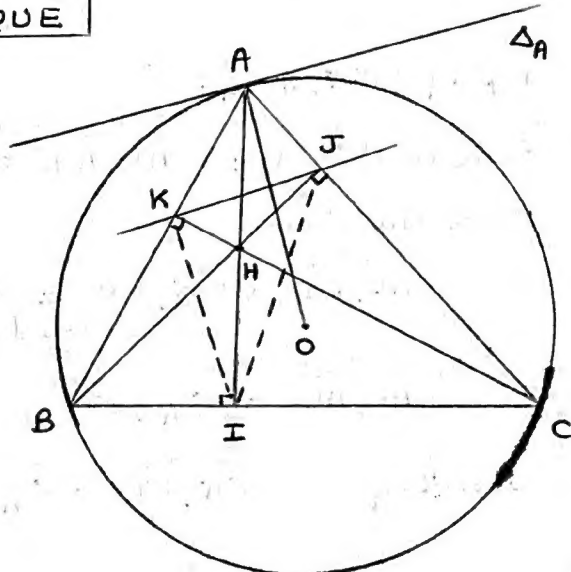
1992-1993 (2000-2001) 1000-1000 1000-1000

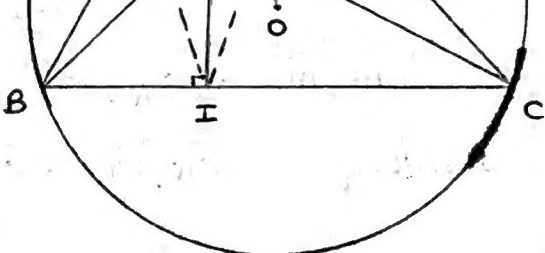
$$2.5 \times 10^3 = 2.5 \times 10^3 + 10^3 \times 10^3 = 1.01 \times 10^6 \text{ g} \times 10^3 = 1.01 \times 10^9 \text{ g}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Agave* *americana* L. (18)

O centre du cercle \mathcal{C} circonscrit à ABC .



- a) En utilisant la tangente Δ_A à \mathcal{C} en A, montrer que les angles orientés de droites $\widehat{AB, AI}$ et $\widehat{AO, AC}$ sont égaux. En déduire que les couples de droites $((AB), (AC))$ et $((AH), (AO))$ ont les mêmes bissectrices (Théorème de Nagel)
- 
- b) En utilisant le a) et le critère de cocyclicité, montrer que $(JK) \parallel \Delta_A$. En déduire $(OA) \perp (JK)$
- c) Prouver que les points A, I, J, B (resp. I, K, A, C) sont cocycliques et en déduire que la hauteur (AI) est aussi bissectrice de $(IK)/(IJ)$.
- d) Si ABC est acutangle, montrer que I, J et K sont sur les côtés du triangle ABC. En déduire que (AI) est la bissectrice du couple de demi-droites $([IK], [IJ])$

utro 0008

a)

* Montrons que $\widehat{AB, AI} = \widehat{AO, AC}$ (1)

ABI est rectangle en I, $\widehat{AB, AI} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BC, AB} \quad [\pi]$

$(OA) \perp \Delta_A$ donc $\widehat{AO, AC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AC, \Delta_A}$

L'égalité (1) provient alors de la définition de Δ_A qui entraîne

$$\overbrace{BC, BA} = \overbrace{AC, \Delta_A}$$

* Si D est une bissectrice du couple de droites $((A, I), (A, O))$, alors

$$\widehat{AB, D} = \widehat{AB, AI} + \widehat{AI, D} = \widehat{AO, AC} + \widehat{D, AO} = \widehat{D, AC}$$

prouve que D est aussi bissectrice de $(AB), (AC)$

outils utilisés :

- angles de droites
- critère de cocyclicité
- produit scalaire (d)
- convexité du $\frac{1}{2}$ plan (d)

b) * $M_q (JK) // \Delta_A$:

On a montré (1): $\widehat{AB, AI} = \widehat{AO, AC}$

On a aussi:

$$\widehat{AB, AI} = \widehat{CK, CB} = \widehat{JK, JB} \quad \text{cycld.}$$

$$\widehat{AO, AC} = \widehat{\Delta_A, JB} \quad (\text{droites orthogonales})$$

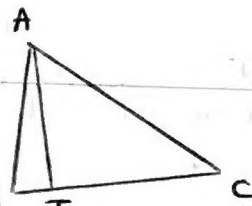
donc que $\widehat{JK, JB} = \widehat{\Delta_A, JB} \Rightarrow (JK) // \Delta_A$

* $(OA) \perp \Delta_A$ et $(JK) // \Delta_A$ entraînent $(OA) \perp (JK)$.

c) Par cocyclicité:

$$\widehat{IK, IA} = \widehat{CK, CA} \quad \text{et} \quad \widehat{IA, IJ} = \widehat{BA, BJ}$$

Il suffit de voir que $\widehat{CK, CA} = \widehat{BA, BJ}$ (droites orthogonales 2 à 2) pour conclure à $\widehat{IK, IA} = \widehat{IA, IJ}$, ie à (IA) est bien une bissectrice de $\widehat{IK, IJ}$ (angle de droites!)



d) * Si ABC est acutangle, \hat{B} et \hat{C} appartiennent à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ donc:

$$\left. \begin{aligned} \vec{BA} \cdot \vec{BC} &= BA \cdot BC \cdot \cos \hat{B} = \vec{BI} \cdot \vec{BC} > 0 \Rightarrow I \in]BC) \\ \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= CA \cdot CB \cdot \cos \hat{C} = \vec{CI} \cdot \vec{CB} > 0 \Rightarrow I \in]CB) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{I \in]BC[}$$

Idem avec J et K .

* Soit s la réflexion d'axe (AI) . On a montré au c):

$$s([IK]) = [IJ]$$

Soit \mathcal{P}_A le demi-plan de frontière $[BC]$ contenant A

$(AI) \perp (BC)$ donc $s(\mathcal{P}_A) \subset \mathcal{P}_A$.

$A \in \mathcal{P}_A \Rightarrow [AB] \in \mathcal{P}_A \Rightarrow K \in \mathcal{P}_A$ (car $K \in]AB[$) $\Rightarrow [IK] \subset \mathcal{P}_A$

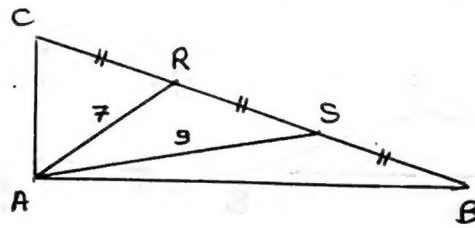
et $s([IK])$ sera une demi-droite d'origine I de \mathcal{P}_A incluse dans (IJ) .

Ce ne peut être que $[IJ]$ qui est incluse dans \mathcal{P}_A ! Donc $s([IK]) = [IJ]$

ie (AI) est bissectrice du couple de 2 demi-dtes $([IK], [IJ])$.

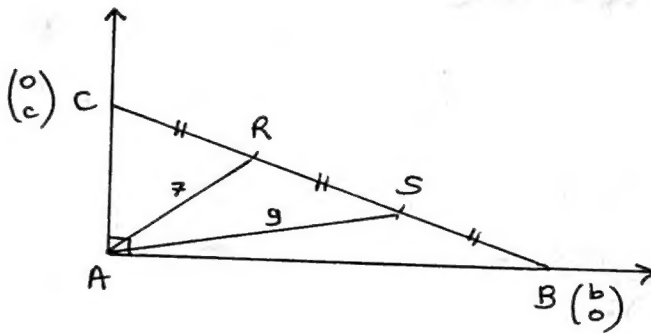
NB: Les pts I, J, K sont sur une ligne brisée qui est "trajectoire de lumière" au sens de Sertais 87, p28.

On donne le dessin suivant où ABC est un triangle rectangle en A :



Calculer BC

1^{ère} méthode : On introduit un repère orthonormé adéquat.



$R = \text{bary. de } C(2), B(1), \text{ donc } R \begin{pmatrix} b/3 \\ 2c/3 \end{pmatrix}$

De même $S \begin{pmatrix} 2b/3 \\ c/3 \end{pmatrix}$

$$\text{D'où } \begin{cases} AR^2 = \frac{1}{9} (b^2 + 4c^2) = 49 \\ AS^2 = \frac{1}{9} (4b^2 + c^2) = 81 \end{cases}$$

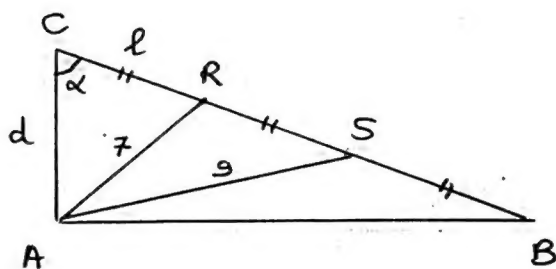
$$\begin{cases} 4b^2 + c^2 = 729 \\ b^2 + 4c^2 = 441 \end{cases}$$

que l'on résout. On trouve $b^2 = 165$ et $c^2 = 69$, d'où :

$$BC^2 = b^2 + c^2 = 234$$

$$\boxed{BC = 3\sqrt{26}}$$

2^{ème} méthode : On utilise la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ vraie dans n'importe quel triangle ABC. On l'applique à chacun des triangles ACR, ACS et ACB :



$$\begin{cases} 9l^2 - d^2 = AB^2 = d^2 + (3l)^2 - 2d(3l)\cos\alpha \\ 49 = d^2 + l^2 - 2dl\cos\alpha \\ 81 = d^2 + (2l)^2 - 2d(2l)\cos\alpha \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} d = 3l\cos\alpha \\ d^2 + l^2 - 2dl\cos\alpha = 49 & (1) \\ d^2 + 4l^2 - 4dl\cos\alpha = 81 & (2) \end{cases}$$

~~(1) et (2) entraînent $-d^2 + 2l^2 = 81 - 2 \times 49 \Leftrightarrow d^2 = 2l^2 + 17$~~

~~En injectant $l\cos\alpha = \frac{d}{3}$ et $d^2 = 2l^2 + 17$ dans (1), on obtient :~~

~~$$d^2 + l^2 - \frac{2}{3}d^2 = 49$$~~

~~$$\frac{d^2}{3} + l^2 = 49$$~~

~~$$\frac{2l^2 + 17}{3} + l^2 = 49$$~~

~~$$l^2 = 26$$~~

~~D'où $BC = 3l = 3\sqrt{26}$.~~

or

plutôt

En remplaçant $\cos\alpha = \frac{d}{3l}$ dans

(1) et (2), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{3} + l^2 = 49 \\ -\frac{d^2}{3} + 4l^2 = 81 \end{cases}$$

$$5l^2 = 130$$

$$l^2 = 26$$

$$l = \sqrt{26}$$

$$\text{d'où } BC = 3l = 3\sqrt{26}$$

Triangle

Montrer que les projetés orthogonaux du sommet A d'un triangle ABC sur les bissectrices intérieures et extérieures issues de B et C , sont alignés.

ABC est un triangle. Notons

$B_I = \text{projeté orth. de } A \text{ sur la bissectrice intérieure de } B$

$$B_E = \quad " \quad " \quad \text{extremum } \Delta'_B \quad "$$

$C_I =$ " " intérieures issue de C

$C_E =$ " " extérieure Δ'_c "

Notons L la symétrie de A par rapport à B_E

M " " " a1 B_H

U " " " " a' C_{II}

V " " " a) C_E

Comme Δ'_B est axe de symétrie du couple de demi-dz ($[BA, -[BC)$), on aura $L \in -[BC)$.

De même on aura $M \in [BC)$. Ainsi $L \neq M$ et $(LM) = (BC)$.

On montrerait de la même façon que $U \neq V$ et $(UV) = (BC)$.

Finalement, les points B_I, B_E, C_I, C_E seront les

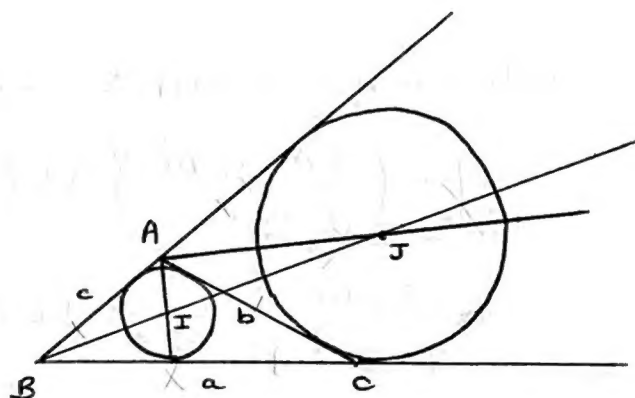
images des pts M, L, U, V par l'homothétie $h_{A, \frac{1}{2}}$.

Comme les pts M, L, U, V sont alignés sur (BC) , les points

B_I, B_E, C_I, C_E seront alignés sur la droite $h_{A, \frac{1}{2}}(C(C))$ \square

Application des barycentres :

Soient ABC un triangle dont les côtés mesurent a, b, c centimètres ;
 I le centre du cercle inscrit à ce triangle, et J le centre du cercle exinscrit à ce triangle situé sur la bissectrice de \hat{B} .



Montrer que :

$$a IA^2 + b IB^2 + c IC^2 = -a JA^2 + b JB^2 - c JC^2$$

* On sait que I est le barycentre de $A(a), B(b), C(c)$ *
 J " " " $A(a), B(-b), C(c)$ ($a-b+c \neq 0$)

de sorte que l'on puisse exprimer chacune des sommes proposées en fonction de a, b et c :

$$\begin{aligned} S &\doteq a IA^2 + b IB^2 + c IC^2 = a \left(\frac{b\vec{AB} + c\vec{AC}}{a+b+c} \right)^2 + b \left(\frac{a\vec{BA} + c\vec{BC}}{a+b+c} \right)^2 + c \left(\frac{a\vec{CA} + b\vec{CB}}{a+b+c} \right)^2 \\ &= \frac{2abc}{(a+b+c)^2} (ab + bc + ac + \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}) \end{aligned}$$

D'après Al Kashi, $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, donc

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = cb \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \quad (1)$$

En appliquant la formule (1) :

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2) \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned} \quad (2)$$

donc

$$S = \frac{2abc}{(a+b+c)^2} (ab + bc + ac + \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2)) = abc$$

Ainsi :

$$S = abc$$

Calculons maintenant $S' = -a JA^2 + b JB^2 - c JC^2$:

$$\begin{aligned} S' &= -a \left(\frac{-b\vec{AB} + c\vec{AC}}{a-b+c} \right)^2 + b \left(\frac{a\vec{BA} + c\vec{BC}}{a-b+c} \right)^2 - c \left(\frac{a\vec{CA} - b\vec{CB}}{a-b+c} \right)^2 \\ &= \frac{2abc}{(a-b+c)^2} \left(-ab - bc + ac + \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BA} \cdot \vec{BC} + \vec{CA} \cdot \vec{CB} \right) \\ &= \frac{2abc}{(a-b+c)^2} \left(-ab - bc + ac + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \right) \quad (\text{d'après (2)}) \end{aligned}$$

$$S' = abc$$

ce qui achève la démonstration.